数理解析研究所講究録
1507巻 2006年 88-94

量子解析と q-微分およびそれらの積分表示
ー偶然から必然へ、量子から古典へ、ミクロからマクロへー

東理大　理　　鈴木増雄 (Masuo Suzuki)
Department of Applied Physics,
Tokyo University of Science

1．はじめに

現代物理学の基本の柱の一つである量子力学では、非可換な演算子を扱う。特に、非可換な演算子 A と B の関数 $f(A+xB)$ を xB でテーラー展開（演算子に関する展開）することが必要になることが多い。[1-3] これを一般的に扱い、しかも、古典的なテーラー展開との対応がつき易い定式化を「量子解析」(quantum analysis) として提唱してはや約10年になる。[4-16] 量子解析では、上の展開の x^n の項は n 次の「量子微分」$d^n f(A)/d^n A$ を用いて表わされる。[1-16] この「量子解析」の定式化は、ファインマン以来の方法 [17,18] と比較して多くの利点を持っている。一つは、通常の C-数に対するテーラー展開との対応関係が直接的であり、量子から古典へのクロスオーバーが研究し易いことである。もう一つの利点は、量子微分が内部微分の差分で表わされ、量子効果が見易く取り扱いが便利なことである。

2．量子解析のまとめ

一般に、演算子 A がパラメータ t の関数 $A=A(t)$ で表わされ、さらに $A(t)$ の関数 $f(A(t))$ を考え、その t に関する微分を

$$\frac{df(A(t))}{dt}=\frac{df(A)}{dA}\cdot\frac{dA(t)}{dt} \tag{2.1}$$

とおく。このとき、$df(A)/dA$ は演算子 $dA(t)/dt$ を演算子 $df(A(t))/dt$ にマップする超演算子 (hyperoperator) である。この式は、また

$$df(A)=\frac{df(A)}{dA}\cdot dA \tag{2.2}$$

と等価である。ここで、$df(A)$ は、Gâteau微分、または

$$df(A)=[A,\,f(A)]=\delta_H f(A)=Hf(A)-f(A)H \tag{2.3}$$

などを表わす。ここで、Hは任意に与えられた演算子である。この超演算子$df(A)/dA$はAとδ_Aで次のように表わされる[4-16]：

$$\frac{df(A)}{dA}=\frac{f(A)-f(A-\delta_A)}{\delta_A}=\int_0^1 f^{(1)}(A-t\delta_A)dt. \tag{2.4}$$

ここで、δ_Aは(2.3)で定義された内部微分であり、$f^{(n)}(x)$は$f(x)$のn階微分を表わす。また、(2.4)式でAは任意の演算子QにAをかける超演算子L_A（すなわち$L_AQ=AQ$）と解釈する。

同様にして、n階量子微分$d^nf(A)/dA^n$は次式で表わされる[4-16]：

$$\frac{d^nf(A)}{dA^n}=n!\int_0^1 dt_1\int_0^{t_1}dt_2\cdots\int_0^{t_{n-1}}dt_nf^{(n)}(A-\sum_{j=1}^n t_j\delta_j). \tag{2.5}$$

上の量子微分(2.5)を用いると、互いに非可換な演算子AとBに関する演算子関数$f(A+xB)$が次のように一般的にテーラー展開される[4-16]：

$$f(A+xB)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\frac{d^nf(A)}{dA^n}B^n \tag{2.6}$$

この公式は、非可換効果（これを量子効果と呼ぶことにする）に関して展開するのに便利に用いられる。すなわち、$\{\delta_j\}$について展開すればよい。(2.5)式で$\delta_j=0$とおけば、$d^nf(A)/dA^n=f^{(n)}(A)$となる。この左辺は超演算子であり、この式は$f^{(n)}(A)$を左からかけることと等価になることを表わしている。この量子解析は、最近いろいろな分野で引用され、利用されつつある。[19-24]

3．q-微分の積分表示

文献25によると、$f(x)$のq-微分$D_qf(x)$は次のように定義される：

$$D_qf(x)=\frac{f(qx)-f(x)}{qx-x}\equiv\frac{d_qf(x)}{d_qx}. \tag{3.1}$$

第2節に説明した量子微分との形式的類似性に着目すれば、これは次のように表わされることがわかる[5,6]：

$$D_qf(x)=\int_0^1 f^{(1)}(x+(q-1)xt)dt \tag{3.2}$$

一般に、n階q-微分は次のようにn重積分で表わされる。[5,6]

$$D_q^nf(x)=[n]_q!\int_0^1 dt_1\int_0^{t_1}dt_2\cdots\int_0^{t_{n-1}}dt_n$$

$$\times f^{(n)}\Big(x+(q-1)x(t_1+t_2q+\cdots+t_nq^{n-1})\Big). \tag{3.3}$$

ただし

$$[n]_q = 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}, \tag{3.4}$$

$$[n_q]! = [1]_q \times [2]_q \times \cdots \times [n]_q\,. \tag{3.5}$$

明らかに、$q=1$では、通常の古典的な微分 (Newton-Leibniz) に帰着する。この古典からのずれ、すなわち“q-微分補正”は$(q-1)$で(3.3)の積分表式を展開することにより容易に求められる。この点で、(3.3)式は大きな利点を持っている。

4．古典差分の積分表示

次節で量子差分の積分表示を議論するための準備として、この節ではまず古典差分の積分表示を求めておく。

古典的な差分$\Delta_h f(x)$は次式によって定義される[25)]：

$$\Delta_h f(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\ . \tag{4.1}$$

この積分表示は次のように与えられることが容易にわかる：

$$\Delta_h f(x) = \int_0^1 f^{(1)}(x+th)dt\ . \tag{4.2}$$

したがって、n階古典差分$\Delta_h^n f(x)$は

$$\Delta_h^n F(x) = \int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \cdots \int_0^1 dt_n f^{(n)}(x+(t_1+\cdots+t_n)h) \tag{4.3}$$

のようなn重積分で与えられる。この公式は、差分と微分の差を具体的に評価するのに便利な表式である。実際、n階差分を$f(x)$の高次微分で表わす公式が次のように得られる：

$$\Delta_h^n f(x) = f^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{k!} a_{n,k} f^{(n+k)}(x)\ . \tag{4.4}$$

ただし、$a_{n,k}$は次の式で与えられる定数である：

$$a_{n,k} = \int_0^1 dt_1 \cdots \int_0^1 dt_n (t_1+\cdots+t_n)^k$$

$$= k! \sum_{k_1=0}^{k} \cdots \sum_{k_n=0(k_1+\cdots+k_n=k)}^{k} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{(k_j+1)!} \ . \tag{4.5}$$

特に、$a_{n,1} = n/2$となる。したがって、

$$\Delta_h^n f(x) = f^{(n)}(x) + \frac{n}{2} f^{(n+1)}(x)h + \mathrm{O}(h^2) \tag{4.6}$$

である。逆に、

$$f^{(n)}(x) = \Delta_h^n f(x) - \frac{n}{2} f^{(n+1)}(x)h + \mathrm{O}(h^2) \ . \tag{4.7}$$

となる。このように、n階古典差分とn階微分との差は、($\mathrm{O}(h^{n+1})$ではなく）hの１次のオーダーであり、その符号は$f^{(n+1)}(x)$ の符号によって決まる。$n=1$ のときは図示してみれば自明であるが、一般のnに対しても同様のことが成立することは興味深い。

5．量子差分の積分表示

この節では、互いに非可換な演算子AとBに対して、つぎのような差分を定義する：

$$\Delta_{h,B} f(A) = \frac{f(A+hB) - f(A)}{h} \ . \tag{5.1}$$

ただし、hはc-数である。ここで、$h \to 0$の極限をとると量子微分

$$\lim_{h\to 0} \Delta_{h,B} f(A) = \frac{df(A)}{dA} \cdot B \tag{5.2}$$

となる。

さて、この量子差分をn回くり返すと、n階量子差分が定義される。この積分表示を考える。前節の古典差分とよく似ているが、$[A,B] \neq 0$の量子効果のため、少し注意が必要である。要するに、量子差分は量子微分の積分で表わされる。まず、

$$g(x) \equiv f(A+xB) \tag{5.3}$$

とおき、xに関するn階微分を$g^{(n)}(x)$とする。これは、量子微分を用いて、$n=1$の場合、

$$g^{(1)}(x) = \frac{df(A(x))}{dA(x)} \cdot B \quad ; \quad A(x) = A + xB \tag{5.4}$$

となる。同様に、$g^{(n)}(x)$ は n 階の量子微分を用いて表わされる。さて、まず、

$$\Delta_{h,B} f(A) = \int_0^1 g^{(1)}(th)dt \tag{5.5}$$

と表わされることは直ちにわかる。一般に、これを拡張して、n 階量子差分は

$$\Delta_{h,B}^n f(A) = \int_0^1 dt_1 \cdots \int_0^1 dt_n g^{(n)}((t_1 + \cdots + t_n)h) \tag{5.6}$$

と表わされる。こうして、古典差分と、量子差分の関係も古典微分と量子微分との直接的な関係を用いて顕に導ける。詳細は原論文を参照して欲しい。[38]

6．量子から古典へ、ミクロからマクロへ

以上のように、量子微分や q-微分の積分表式 (2.4) や (2.5) は量子から古典へのクロスオーバーを議論するのに極めて適した定式化になっていることがわかる。また、量子微分が積分を用いて表わされているのは、量子微分の非局所性を示している。さらに、(2.4) や (2.5) の量子微分は、互いに可換な超演算子で表わされているので計算し易く大変便利である。すなわち、非可換な量子解析が可換な超演算子で実行できるところに、この量子解析の特徴がある。

7．むすび

最近、上述の量子解析はいろいろな分野で利用されつつある。[19–24] 特に、高次の指数積分公式を求めるのに大変有効に利用されている。[26–37] また、量子カオスの問題などにも応用されつつある。[24]

参考文献

1. 数理科学「偶然から必然へ – 小さな原因と大きな結果」, 44巻1号（サイエンス社, 2006）.
2. 鈴木増雄, 現代物理学叢書「統計力学」（岩波書店, 2000年）.
3. 数理科学「不確定性原理の新展開」, 43巻10号（サイエンス社, 2005）.
4. M. Suzuki, *Quantum Analusis – Non-Commutative Differential and Integral Calculus, Commun. Math. Phys.* **183** (1997) 339.
5. M. Suzuki, *Refined Formulation of Quantum Analysis, q-Derivative*

and Exponential Splitting, J. Phys. A (2006) in press.

6. M. Suzuki, *Noncommutative Procedures in Spotaneous Symmetry Breaking and Quantum Differentiation*, Nankai Tracks in Mathematics (World Scientific, 2006).
7. M. Suzuki, *Int. J. Mod. Phys.* B **10** (1996) 1637.
8. M. Suzuki, *J. Math. Phys.* **38** (1997) 1183.
9. M. Suzuki, *Phys. Lett.* A **224** (1997) 337.
10. M. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.* **100** (1998) 475.
11. M. Suzuki, *Rev. Math. Phys.* **11** (1999) 243.
12. M. Suzuki, *Int. J. Mod. Phys.* C **10** (1999) 1385.
13. M. Suzuki, *Comp. Phys. Commun.* **127** (2000) 2.
14. M. Suzuki, 2000 in *Trends in Contemporary Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability*, ed. L Accardi, H-H Kuno, N. Obata, K. Saito, S. Si and L Streit (Instituto Italiano di Cultura, Kyoto).
15. M. Suzuki, 2002 in *Non-Commutativity, Infinite-Demensionality and Probability at the Crossroad*, eds. N Obata *et al* (Singapore: World Scientific).
16. M. Suzuki, 1998 in *Current Topics in Physics I* (Singapore: World Scientific) 355-60.
17. V. E. Nazaikinskii, V. E. Shatalov and B. Yu Sternin, *Methods of Noncommutative Analysis, Walter de Gruter*, 1996, およびその中の参考文献.
18. M. Abe, N. Ikeda and N. Nakanishi, *J. Math. Phys.* **38** (1997) 549.
19. R. Bhatia, D. Singh and K. B. Sinha, *Commun. Math. Phys.* **191** (1998) 603.
20. R. Bhatia and K. B. Sinha, *Lin. Algeb. and its Appl.* **303** (1999) 231.
21. R. Bhatia and j. A. T. da Silva, *Lin. Algeb. and its Appl.* **341** (2002) 391.
22. H. Hasegawa, *Infinite Dimensional Analsis, Quantum Probability and*

Related Topics **6(3)** (2003) 413.
23. N. Hatano, *J. Phys. Soc. Jpn.* **74** (2005) 3093.
24. W. A. Majewski and M. Marciniak, *On Quantum Lyapunov Exponents*, *quant-phys/* 0510224.
25. V. Kac and P. Cheung, *Quantum Calculus* (Springer, 2000)
26. M. Suzuki, *Phys. Lett. A* **146** (1990) 319.
27. M. Suzuki, *J. Math. Phys.* **32** (1991) 400.
28. M. Suzuki, *Phys. Lett. A* **165** (1992) 387.
29. M. Suzuki, *J. Phys. Soc. Jpn.* **61** (1992) 3015.
30. M. Suzuki and Umeno, in *Computer Simulation Studies in Condensed-Matter Physics VI* ed. D. P. Landau, K. K. Mon, H. B. Schüttler (Berlin-Springer) (1993) 74.
31. H. Kobayashi, N. Hatano and M. Suzuki, *Physica A* **211** (1994) 234.
32. M. Suzuki, *Proc. Japan Acad. Ser.* B **69** (1993) 161.
33. Z. Tsuboi and M. Suzuki, *Int. J. Mod. Phys. B* **9** (1995) 3241.
34. M. Suzuki, *Commun. Math. Phys.* **163** (1994) 491.
35. M. Suzuki, *Physica A* **321** (2003) 334.
36. N. Hatano and M. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.* **85** (1991) 481.
37. N. Hatano and M. Suzuki, in *Quantum Annealing and Related Optimization Methods,* Lecture Notes Phys. **679** edited by A. Das and B. K. Chakrabarti, Springer (2005), and references cited therein.
38. M. Suzuki, in preparation.